Codice del candidato:

Državni izpitni center

M 2 3 1 4 0 2 1 1 I

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore

MATEMATICA

Prova d'esame 1

B) Quesiti strutturati brevi

C) Quesiti strutturati

Sabato, 3 giugno 2023 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:
Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta).
Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli perforati della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti,** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Potete disegnare con la matita. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

M 2 3 1 4 0 2 1 1 I 0 2

Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia
Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia Scientia Est Potentia

Formule

(**Somma e differenza di potenze a esponente naturale**) Per qualsiasi $a,\ b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$\boxed{a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)}$,

$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}$.

(**Teorema di Euclide e dell'altezza**) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c. L'altezza all'ipotenusa è h_c, la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1, la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1. Quindi vale $\boxed{a^2=ca_1,\ b^2=cb_1}$, $\boxed{h_c^2=a_1b_1}$.

(**Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo**) Il triangolo ha i lati $a,\ b$ e c, il semiperimetro è $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, l'area è A, l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato è r e il raggio della circonferenza circoscritta la triangolo dato è R. Quindi è $\boxed{r=\dfrac{A}{p}}$ e $\boxed{R=\dfrac{abc}{4A}}$.

(**Formula di Erone**) Il triangolo ha i lati $a,\ b$ e c, il semiperimetro è $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area è $\boxed{A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

(**Area del triangolo**) Siano $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ e $C(x_3,\ y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici $A,\ B$ e C è uguale a $\boxed{A=\dfrac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|}$.

(**Sfera**) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $\boxed{S=4\pi r^2,\ V=\dfrac{4\pi r^3}{3}}$.

(**Distanza di un punto da una retta**) Siano $a,\ b,\ c,\ x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0,\ y_0)$ dalla retta p, espressa dall'equazione $ax+by-c=0$, è $\boxed{d(T_0,\ p)=\dfrac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

(**Logaritmo**) Siano $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$. Quindi per ogni $x>0$ vale $\boxed{\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$.

(**Teoremi di addizione**) Per qualsiasi $x,\ y \in \mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y}$, $\boxed{\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y}$.

Per qualsiasi $x,\ y \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, per i quali $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ per qualsiasi $k\in\mathbb{Z}$ e $\tan x\tan y\neq -1$, vale $\boxed{\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}}$.

(**Formule di bisezione**) Per qualsiasi $x\in\mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}}$, $\boxed{\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}}$.

Per qualsiasi $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+\pi\cdot 2k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ vale $\boxed{\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}$.

(**Formule di prostaferesi**) Per qualsiasi $x,\ y\in\mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin x\pm\sin y=2\sin\dfrac{x\pm y}{2}\cos\dfrac{x\mp y}{2}}$,

$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}$,

$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}}$.

(**Formule del Werner**) Per qualsiasi $x,\ y \in \mathbb{R}$ vale

$\boxed{\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)}$,

$\boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)}$,

$\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)}$.

(**Ellisse**) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b $(a > b)$, la sua eccentricità lineare è e, la sua eccentricità numerica è ε. Quindi vale $\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Iperbole**) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b, la sua eccentricità lineare è e, la sua eccentricità numerica è ε. Quindi vale $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Parabola**) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $\boxed{F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)}$, l'equazione della retta direttrice della parabola è $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$.

(**Successione aritmetica**) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(**Successione geometrica**) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di ragione $q \in \mathbb{R}$ è $\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$, se $q \neq 1$, e $\boxed{S_n = na_1}$, se $q = 1$.

(**Limiti**) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$ e $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$.

(**Integrale indefinito**) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$ $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$ e $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C}$.

(**Integrazione per partes**) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u,\ v : D \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale $\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'}$.

(**Volume del solido di rotazione**) Sia $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f, l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360°, è $\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x}$.

(**Formula di Bernouilli**) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A. La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $\boxed{P(n,\ p,\ k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Foglio per la minuta

M 2 3 1 4 0 2 1 1 I 0 6

Foglio per la minuta

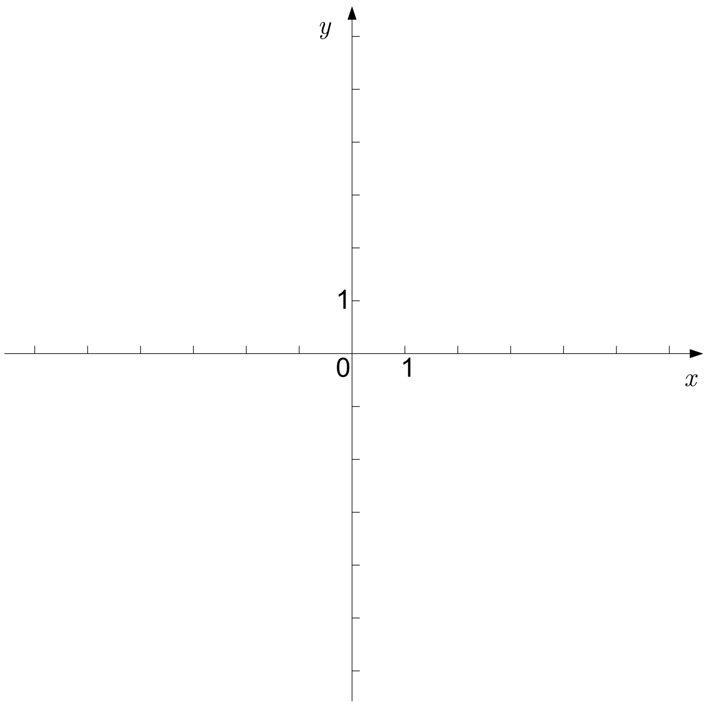
Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Foglio per la minuta

Foglio per la minuta

B) QUESITI STRUTTURATI BREVI

1. Tracciate le rette di equazione $y = -3$ e $y = -2x + 3$ e calcolate l'area del triangolo che le rette racchiudono con l'asse delle ordinate.

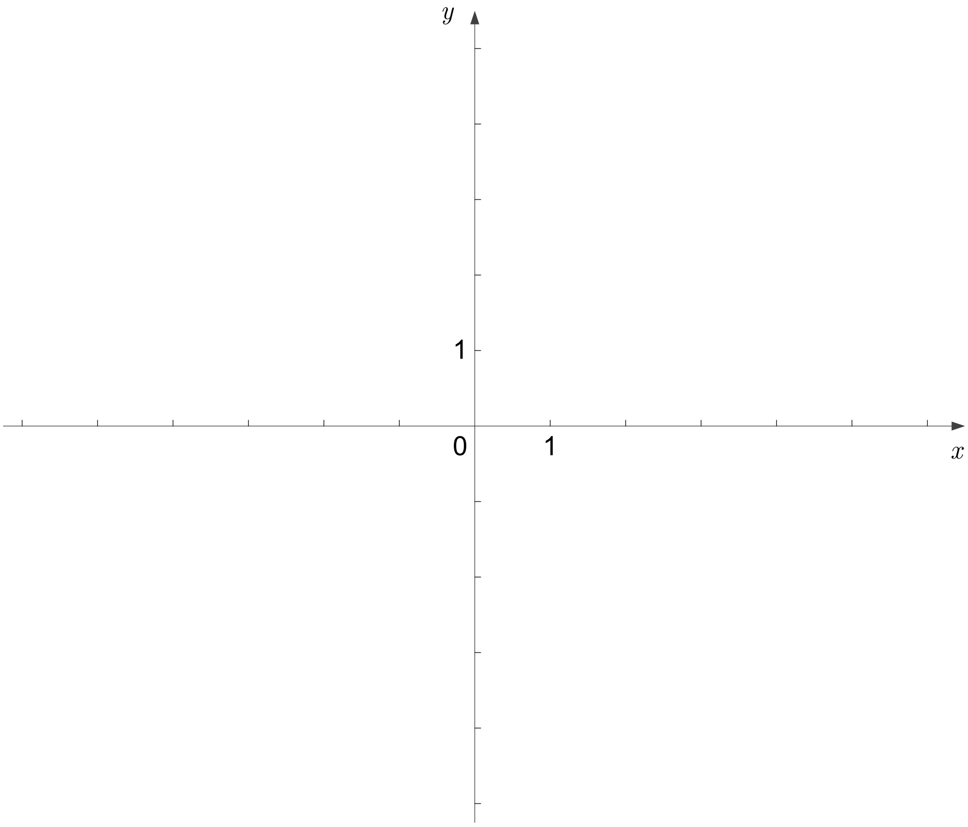


(6 punti)

2. Calcolate la base a della funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$, il cui grafico passa per il punto $A\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right)$.

(6 punti)

3. Calcolate gli zeri, i poli, il termine noto e l'asintoto della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4}$ e tracciate il suo grafico. (Suggerimento: nella risoluzione del quesito non è necessario calcolare la derivata della funzione.)



(8 punti)

M 2 3 1 4 0 2 1 1 1 I 1 2

4. Sia $\cos x = \frac{1}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Calcolate i valori esatti delle espressioni $\sin x$ e $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

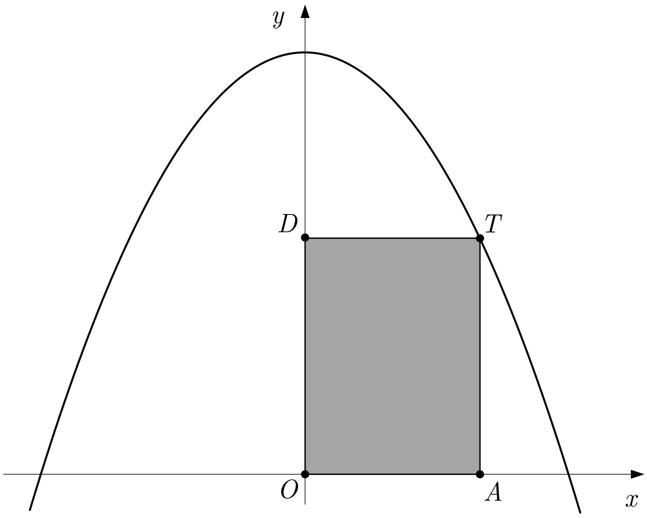
(6 punti)

5. Verificate che il numero -1 è uno zero doppio del polinomio $p(x) = 2x^4 + 7x^3 + 6x^2 - x - 2$.
Determinate inoltre i rimanenti due zeri.

(7 punti)

M 2 3 1 4 0 2 1 1 I 1 4

6. Il punto T giace nel primo quadrante sul grafico della funzione $f(x) = 6 - x^2$ in modo che l'area del rettangolo $OATD$ sia massima (v. figura). Calcolate l'area del rettangolo $OATD$.



(7 punti)

Pagina di riserva

VOLTATE IL FOGLIO.

C) QUESITI STRUTTURATI

1. Nel piano complesso è dato l'insieme dei numeri complessi $K=\left\{x+y\mathrm{i};\ \ x^2+y^2=25;\ \ x,\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

   1.1. Calcolate i vertici dell'esagono regolare w_j, $1\leq j\leq 6$, che sono elementi dell'insieme K, se $w_1=5$.

   (3 punti)

   1.2. Calcolate l'intersezione degli insiemi K e L, dove $L=\left\{z\in\mathbb{C};\ \left|z-1-\mathrm{i}\right|=5\right\}$.

   (4 punti)

   1.3. Risolvete l'equazione $2+5\mathrm{i}-|z|=(9-z)\mathrm{i}$, dove $z\in\mathbb{C}$.

   (4 punti)

M 2 3 1 4 0 2 1 1 I 1 8

2. Risolvete i seguenti quesiti indipendenti.

2.1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:
$\vec{a}=(3,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3,\ 0)$, $\vec{c}=(2,\ 0,\ 3)$ e $\vec{d}=(2,\ -3,\ -6)$.
Esprimete il vettore $\vec{d}$ con la combinazione lineare dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

(5 punti)

2.2. Per quali valori di x il prodotto scalare dei vettori $\vec{a}=(mx,\ -1,\ x)$ e $\vec{b}=(m,\ m,\ -1)$ è uguale a 1? Esaminate tutte le soluzioni rispetto al parametro $m \in \mathbb{R}$.

(4 punti)

M 2 3 1 4 0 2 1 1 I 2 0

Pagina di riserva