



Šifra kandidata:

Državni izpitni center



M 2 3 1 4 0 2 1 2

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK

Višja raven
MATEMATIKA
Izpitna pola 2

B) Krajše strukturirane naloge
C) Strukturirane naloge

Sobota, 3. junij 2023 / 90 minut (45 + 45)

Dovoljeno gradivo in pripomočki:

*Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko,
geometrijsko orodje (šestilo in ravnilo, lahko tudi trikotnik)
in računalno.*

Priloga s formulami in konceptna lista so na perforiranih listih, ki jih kandidat pazljivo iztrga.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani).

Izpitna pola je sestavljena iz dveh delov, dela B in dela C. Časa za reševanje je 90 minut. Priporočamo vam, da za reševanje dela B porabite 45 minut, za reševanje dela C pa 45 minut.

Izpitna pola vsebuje 6 krajših strukturiranih nalog v delu B in 2 strukturirani nalogi v delu C. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 60, od tega 40 v delu B in 20 v delu C. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na straneh 3 in 4.

Rešitve pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom v izpitno polo v za to predvideni prostor **znotraj okvirja**. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 15 in 20 sta rezervni; uporabite ju le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 20 strani, od tega 2 rezervni.

**Formule**

(Vsota in razlika potenc z naravnim eksponentom) Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ in za poljubno naravno število n velja

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Evklidov in višinski izrek) Pravokotni trikotnik ima kateti a in b ter hipotenuzo c . Višina na hipotenuzo je v_c , pravokotna projekcija katete a na hipotenuzo je a_1 , pravokotna projekcija katete b na hipotenuzo pa b_1 . Tedaj velja $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$.

(Polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga) Trikotnik ima stranice a, b in c , polovica obsega je $s = \frac{a+b+c}{2}$, ploščina je S , polmer danemu trikotniku včrtanega kroga je r in polmer danemu trikotniku očrtanega kroga je R . Tedaj je $r = \frac{S}{s}$ in $R = \frac{abc}{4S}$.

(Heronova formula) Trikotnik ima stranice a, b in c , polovica obsega je $s = \frac{a+b+c}{2}$. Tedaj je njegova ploščina $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

(Ploščina trikotnika) Naj bodo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ točke v ravnini. Ploščina trikotnika z oglišči A, B in C je enaka $S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Krogla) Površina in prostornina krogle s polmerom r sta $P = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Razdalja točke od premice) Naj bodo $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ in naj a in b ne bosta oba enaka 0.

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice p , podane z enačbo $ax + by - c = 0$, je

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Logaritem) Naj bosta $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Tedaj za vsak $x > 0$ velja $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Adicijski izreki) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Za poljubna $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, za katera je $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ za poljuben $k \in \mathbb{Z}$ in

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{velja} \quad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

(Kotne funkcije polovičnih kotov) Za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Za poljuben $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ velja $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Faktorizacija vsote in razlike kotnih funkcij) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$



(Razčlenitev produkta kotnih funkcij) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Elipsa) Elipsa v ravnini ima polosi a in b ($a > b$), njena linearna ekscentričnost je e , njena

$$\text{numerična ekscentričnost je } \varepsilon. \text{ Tedaj velja } \boxed{e^2 = a^2 - b^2}, \boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}.$$

(Hiperbola) Hiperbola v ravnini ima realno polos a in imaginarno polos b , njena linearna

$$\text{ekscentričnost je } e, \text{ njena numerična ekscentričnost je } \varepsilon. \text{ Tedaj velja } \boxed{e^2 = a^2 + b^2}, \boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}.$$

(Parabola) Parabola v ravnini z enačbo $y^2 = 2px$ ima gorišče v $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, enačba premice vodnice

$$\text{dane parabole pa je } \boxed{x = -\frac{p}{2}}.$$

(Aritmetično zaporedje) Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja (a_n) je $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(Geometrijsko zaporedje) Vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja (a_n) s kvociantom $q \in \mathbb{R}$

$$\text{je } \boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}, \text{ če je } q \neq 1, \text{ in } \boxed{S_n = na_1}, \text{ če je } q = 1.$$

(Limiti) $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$ in $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.

(Nedoločeni integral) Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedaj je za vsak $C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C} \text{ in } \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C}.$$

(Integracija po delih) Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Tedaj velja

$$\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'}.$$

(Volumen rotacijskega telesa) Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Volumen telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki ga omejujejo graf funkcije f , abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, zavrtimo

$$\text{okrog abscisne osi za } 360^\circ, \text{ je } \boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx}.$$

(Bernoullijeva formula) Naj bo p verjetnost, da se v danem poskusu zgodi dogodek A . Verjetnost, da se dogodek A v n zaporednih ponovitvah poskusa zgodi natanko k -krat, je

$$\boxed{P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}.$$



Konceptni list

Empty rectangular box for writing.

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



Konceptni list



Konceptni list

Empty rectangular box for writing.



2. Gorišči elipse sta v točkah $F_1(-4, 0)$ in $F_2(4, 0)$, eno izmed temen pa je v točki $A(0, -3)$.

2.1. Zapišite enačbo elipse.

(5)

2.2. Zapišite enačbo krožnice s središčem v točki F_1 , ki poteka skozi točko A .

(2)

(7 točk)



3. Pred dvema letoma je bila mama petkrat starejša od sina, čez osem let pa bo mamina starost $\frac{5}{2}$ starosti sina. Kolikšni sta starosti mame in sina danes? Zapišite odgovor.

(6 točk)



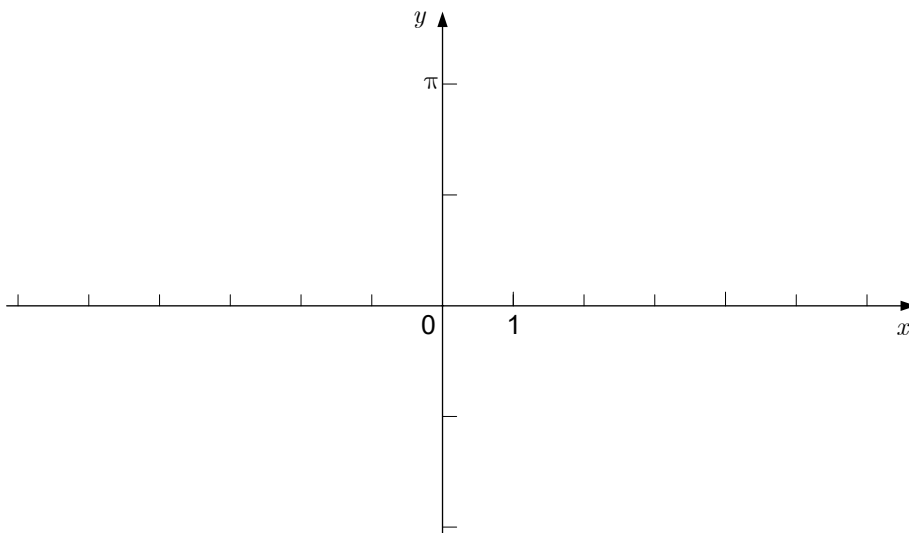
4. V razredu z 28 dijaki je 20 deklet in 8 fantov.
- 4.1. V ponedeljek bo profesor naključno izbral enega od njih in ocenil njegovo znanje. Izračunajte verjetnost, da bo izbrani dijak fant. (2)
- 4.2. V sredo bosta naključno izbrana dva. Izračunajte verjetnost, da bosta to dekleti. (3)

(5 točk)

**C) STRUKTURIRANE NALOGE**

1. Dani sta funkciji f in g s predpisoma $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 1}$ in $g(x) = \arctan x$.

1.1. Narišite graf funkcije g .



(2 točki)

1.2. Dokažite, da je odvod funkcije $h(x) = g(f(x))$ konstanta.

(4 točke)

1.3. Z metodo »per partes« izračunajte $\int g(x) dx$. Zapišite natančno vrednost določenega

$$\text{integrala } \int_0^1 g(x) dx.$$

(4 točke)



2. Funkciji f in g sta dani s predpisoma $f(x) = \sqrt{5x+1}$ in $g(x) = \ln(-x^2 + x + 6)$.
- 2.1. Določite definijsko območje in zalogo vrednosti inverzne funkcije f^{-1} ter zapišite njen predpis. (3 točke)
- 2.2. Rešite enačbo $(f(x))^2 = e^{g(x)}$. (3 točke)
- 2.3. Naj bo $D_h = (-2, c)$, $c > -2$, definijsko območje funkcije $h(x) = \ln(-x^2 + bx + 8)$, $b \in \mathbb{R}$. Izračunajte b in c . (4 točke)

