



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE AUTUNNALE

**Livello di base**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

- A) Quesiti brevi  
B) Quesiti strutturati brevi

**Giovedì, 24 agosto 2023 / 90 minuti (30 + 60)**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta).*

*Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli perforati della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

**Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate A e B. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 30 minuti alla risoluzione della parte A, e 60 minuti a quella della parte B.

La parte A della prova d'esame contiene 8 quesiti brevi; la parte B della prova contiene 6 quesiti strutturati brevi. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 20 nella parte A e 40 nella parte B. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Potete disegnare con la matita. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 13 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 20 pagine, di cui 1 vuota e 2 di riserva.*



**Formule**

**(Somma e differenza di cubi)** Per qualsiasi  $a, b \in \mathbb{R}$  vale  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ .

**(Teorema di Euclide e dell'altezza)** Il triangolo rettangolo ha i cateti  $a$  e  $b$  e l'ipotenusa  $c$ . L'altezza all'ipotenusa è  $h_c$ , la proiezione ortogonale del cateto  $a$  all'ipotenusa è  $a_1$ , la proiezione ortogonale del cateto  $b$  all'ipotenusa è  $b_1$ . Quindi vale  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$ .

**(Raggio della circonferenza circoscritta e della circonferenza inscritta a un triangolo)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , l'area è  $A$ , il raggio della circonferenza inscritta al triangolo dato è  $r$  e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato è  $R$ . Perciò  $r = \frac{A}{p}$  e  $R = \frac{abc}{4A}$ .

**(Formula di Erone)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Quindi la sua area è  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

**(Area del triangolo)** Siano  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  punti nel piano. L'area del triangolo di vertici  $A, B$  e  $C$  è  $A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$ .

**(Sfera)** L'area della superficie totale e il volume della sfera di raggio  $r$  sono  $S = 4\pi r^2$ ,  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ .

**(Teoremi di addizione)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ , per i quali  $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$  per qualsiasi  $k \in \mathbb{Z}$  e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale} \quad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

**(Formule di bisezione)**

$$\text{Per qualsiasi } x \in \mathbb{R} \text{ vale } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

$$\text{Per un qualsiasi } x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \} \text{ vale } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

**(Ellisse)** L'ellisse nel piano ha i semiassi  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ), la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Iperbole)** L'iperbole nel piano ha il semiasse reale  $a$  e il semiasse immaginario  $b$ , la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Parabola)** Parabola nel piano di equazione  $y^2 = 2px$  ha il fuoco in  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , l'equazione della retta direttrice della parabola data è  $x = -\frac{p}{2}$ .

**(Successione aritmetica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione aritmetica  $(a_n)$  è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

**(Successione geometrica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione geometrica  $(a_n)$  di

$$\text{ragione } q \in \mathbb{R} \text{ è } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ se } q \neq 1, \text{ e } S_n = na_1, \text{ se } q = 1.$$

**(Limiti)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .



# Pagina vuota

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**Foglio per la minuta**



**Foglio per la minuta**

A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten notes or minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**Foglio per la minuta**



**Foglio per la minuta**

A large, empty rectangular box intended for handwritten notes or minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**A) QUESITI BREVI**

1. Nella colonna di sinistra della tabella c'è la descrizione di un insieme. Accanto a essa, nella colonna di destra della tabella, scrivete la potenza.

Descrizione dell'insieme	Potenza dell'insieme
L'insieme $A$ è l'insieme di tutti i numeri naturali pari minori di 7.	
L'insieme $B$ è l'insieme di tutte le diagonali di un pentagono regolare.	

(2 punti)

2. Risolvete l'equazione  $3|x+3| = 2|x+3| + 8$ .

(3 punti)



3. In un gruppo di bambini ci sono 6 maschi e 3 femmine. L'età media dei maschi è di 10 anni, l'età media delle femmine è di 7 anni. Qual è l'età media dei bambini nel gruppo?

(3 punti)

4. Sia  $\alpha$  un angolo acuto per il quale vale che  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Calcolate  $\cos \alpha$  e  $\tan \alpha$ .

(3 punti)



5. Scrivete il vertice della funzione quadratica  $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ .

(2 punti)

6. Risolvete l'equazione  $\log_x 32 = 5$ .

(2 punti)



7. Calcolate la derivata della funzione  $f(x) = \ln(2x + 5)$ .

(2 punti)

8. Nella colonna centrale della tabella scrivete il simbolo  $<$ ,  $>$  oppure  $=$  in modo che in ogni riga della tabella la proposizione sia vera.

	Simbolo	
$1 + \frac{1}{4}$		$2 - \frac{4}{5}$
$\sin 120^\circ$		$\sin 150^\circ$
$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



## Pagina di riserva

**VOLTATE IL FOGLIO.**

**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

1. Sono dati i vettori  $\vec{a} = (4, -3, 1)$ ,  $\vec{b} = (-2, 5, 3)$  e  $\vec{c} = (x, 2, 4)$ .

1.1. Calcolate  $2\vec{a} + \vec{b}$ .

(2)

1.2. Calcolate  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

(2)

1.3. Calcolate la lunghezza/modulo del vettore  $\vec{b}$ .

(2)

1.4. Determinate  $x$  in modo che i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{c}$  siano ortogonali.

(2)

(8 punti)



2. Determinate la correttezza (verità) oppure la non correttezza (falsità) di ciascuna delle proposizioni nella tabella cerchiando SÌ se la proposizione è vera, NO se la proposizione è falsa.

Proposizione	Correttezza/non correttezza della proposizione	
$i^2 = -1$	Sì	NO
$ 3 - 4i  = 25$	Sì	NO
$\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$	Sì	NO
$i^{2022} = -1$	Sì	NO
$\operatorname{Im}(3 - 4i) = -4i$	Sì	NO
$\operatorname{Re}(3 - 4i) = 3$	Sì	NO
$25(3 - 4i)^{-1} = 3 + 4i$	Sì	NO

(7 punti)



3. Siano  $a$  e  $b$  due numeri reali qualsiasi,  $a > 0$  e  $b \neq 0$ . Ogni espressione della colonna di sinistra della tabella deve essere uguale all'espressione nella riga corrispondente della colonna di destra. Le espressioni della colonna di destra sono indicate con le lettere dalla A alla L.

Negli appositi spazi della colonna di destra della tabella, scrivete la lettera dell'espressione uguale a quella di ciascuna riga della colonna di sinistra (la prima riga è già completata).

$a^0$	L
$(ab^2)^2$	
$(a + b^2)^2$	
$(ab^2) : (ab)^3$	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{ab}$	
$\sqrt{b^2}$	

- (A)  $ab^4$   
 (B)  $b$   
 (C)  $|b|$   
 (D)  $a^2b^4$   
 (E)  $a^{-2}b^{-1}$   
 (F)  $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}}$   
 (G)  $a^2 + 2ab^2 + b^4$   
 (H)  $\sqrt[5]{a^5b^5}$   
 (I)  $a^2 + b^4$   
 (J)  $a^{-3}b^{-1}$   
 (K)  $-1$   
 (L)  $1$

(5 punti)





4. Risolvete l'equazione  $\log(15 - x) + \log(-x) = 2$ .

(7 punti)



5. È data la funzione con la dipendenza  $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$ .

Scrivete l'insieme di definizione della funzione  $f$ .

Scrivete l'equazione dell'asintoto orizzontale della funzione  $f$ .

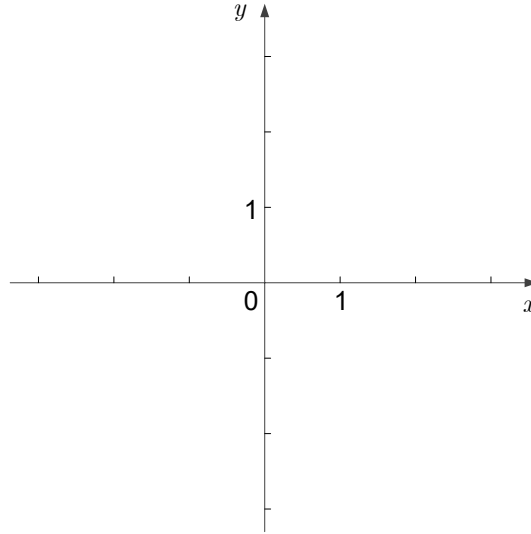
Determinate la dipendenza della funzione inversa  $f^{-1}$ .

Scrivete l'insieme immagine della funzione  $f$ .

(6 punti)



6. Sia  $a$  un numero reale positivo.  
Nello stesso sistema di coordinate fate lo schizzo del grafico della funzione  $f(x) = e^{ax}$  e della retta  $y = e$ .



Calcolate l'area della figura delimitata dal grafico della funzione  $f$ , dalla retta  $y = e$  e dall'asse delle ordinate.

(7 punti)



# Pagina di riserva