



Codice del candidato:

Državni izpitni center



I SESSIONE D'ESAME

# MATEMATICA

≡ Prova d'esame 2 ≡

Livello superiore

**Mercoledì 2 giugno 2004 / 90 minuti**

*Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.*

ESAME DI MATURITÀ LICIALE

## INDICAZIONI PER I CANDIDATI

**Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!**

**Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 3 esercizi strutturati. Risolvete tutti gli esercizi. Gli esercizi vanno risolti nello spazio sotto il testo dell'esercizio e nella pagina che segue. Le pagine 10, 11, e 12 sono di riserva, usatele solo in caso di carenza di spazio. Non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto nelle suddette pagine.

**I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

**Gli esercizi risolti a matita e le risoluzioni non chiare e illeggibili verranno valutati con zero (0) punti. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.**

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Buon lavoro.

*Questa prova d'esame ha 12 pagine, di queste 3 sono di riserva.*

## Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritte ed inscritte ad un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,  $r = \frac{A}{p}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:  

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:  
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ ,  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:  
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$   

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:  
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
,  $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:  
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$ ;  
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$ ;  
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :  

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse:  $c^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a > b$
- Iperbole:  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a$  è il semiasse reale.
- Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:  

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
,  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

VOLTATE PAGINA

01. Sono date le funzioni  $f(x) = \ln \frac{x-3}{2} + 1$  e  $g(x) = 2e^{x-1} + 3$ .

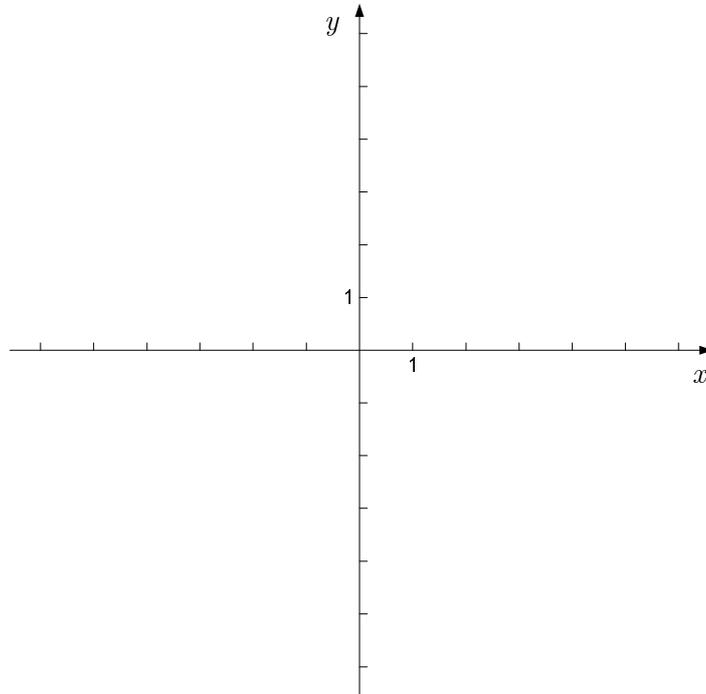
- a) Scrivete nella tabella il campo di esistenza e l'insieme immagine delle funzioni  $f$  e  $g$ . (6 punti)
- b) Calcolate le coordinate del punto appartenente al grafico della funzione  $f$  nel quale la retta tangente al grafico è parallela alla retta di equazione  $x - 2y - 4 = 0$ . (6 punti)
- c) Calcolate l'area della figura delimitata dall'asse delle ascisse, le rette di equazione  $x = 1$  e  $x = 2$  e il grafico della funzione  $g$ . (8 punti)
- d) Dimostrate che le funzioni  $f$  e  $g$  sono una inversa dell'altra. (4 punti)

	Campo di esistenza	Insieme immagine
$f$		
$g$		



02. Risolvete i seguenti esercizi.

- a) Siano  $A = \{x \in \mathbb{R}; 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}; 3|x-2| - x = 6\}$ . Scrivete l'insieme  $C = A \times B$  elencando tutti i suoi elementi. (7 punti)
- b) Siano  $D = \{x \in [0, 2\pi]; \cos x - \sin x = 0\}$  e  $E$  l'insieme delle ascisse dei punti nei quali la funzione  $f(x) = \sin 2x$  raggiunge il massimo nell'intervallo  $[0, \pi]$ . Scrivete l'insieme  $F = D \cup E$ . Quanti elementi ha l'insieme potenza dell'insieme  $F$ ? (8 punti)
- c) Sono dati gli insiemi di punti nel piano:  $K = \{(x, y); 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0\}$ ,  $L = \{(x, y); y - x + 3 \geq 0\}$  e  $M = \{(x, y); y > -2\}$ . Disegnate nel sistema di coordinate dato l'insieme di punti  $N = (K \cap L) \setminus M$ . (8 punti)





03. Sono dati quattro trapezi  $ABCD$ . In ogni trapezio le basi misurano  $|AB| = a = 16$  cm e  $|CD| = c = 2$  cm.

a) Nel primo trapezio le lunghezze dei lati  $c, d, b, a$  stanno in progressione aritmetica. Calcolate le lunghezze dei lati obliqui  $b = |BC|$  e  $d = |AD|$ .

(5 punti)

b) Nel secondo trapezio le rette di sostegno dei lati obliqui si intersecano nel punto  $E$ . Calcolate la lunghezza del lato  $b$ , se i segmenti  $|CE| = 2$  cm e  $|DE| = 1$  cm.

(5 punti)

c) Nel terzo trapezio l'angolo  $\sphericalangle DAB$  misura  $\alpha = 70^\circ$ , l'angolo  $\sphericalangle ABC$  invece  $\beta = 60^\circ$ . Calcolate la lunghezza del lato  $d$ .

(6 punti)

d) Nel quarto trapezio il lato  $b$  è di 2 cm più lungo del lato  $d$ , l'area del trapezio invece è di  $108$  cm<sup>2</sup>. Calcolate la lunghezza dei lati  $b$  e  $d$ .

(9 punti)



PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA