



Codice del candidato:

Državni izpitni center



PRIMA SESSIONE D'ESAME

MATEMATICA

≡ Prova d'esame 2 ≡

Livello superiore

Lunedì 6 giugno 2005 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 3 esercizi strutturati. Risolvete tutti gli esercizi. Gli esercizi vanno risolti nello spazio sotto il testo dell'esercizio e nella pagina che segue. Le pagine 10, 11, e 12 sono di riserva, usatele solo in caso di carenza di spazio. Non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto nelle suddette pagine.

I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

Gli esercizi risolti a matita e le risoluzioni non chiare e illeggibili verranno valutati con zero (0) punti. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 40 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 12 pagine, di queste 3 sono di riserva.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritte ed inscritte ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

VOLTATE PAGINA

01. Sono date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2e^{-x}$.

a) Nel sistema di coordinate dato fate lo schizzo dei grafici delle funzioni f e g . Calcolate l'angolo tra il grafico della funzione g e l'asse delle ordinate. Il risultato sia espresso ai primi di grado.

(6 punti)

b) Calcolate le coordinate esatte del punto d'intersezione tra i grafici delle funzioni f e g .

(3 punti)

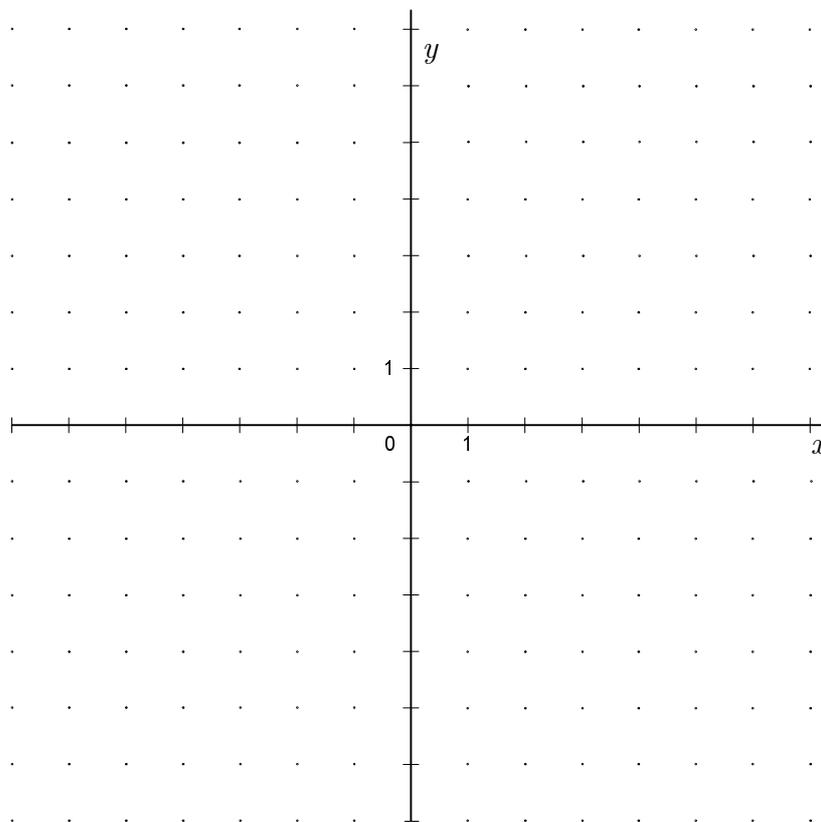
c) Sia L la figura delimitata, nel primo quadrante, dai grafici delle funzioni f e g e dall'asse delle ordinate. Dimostrate che l'area della figura L è uguale a $3 - 2\sqrt{2}$.

(3 punti)

d) Determinate la funzione inversa g^{-1} della funzione g .

Dimostrate che $(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = \ln 2 - x$.

(3 punti)



02. Nel sistema coordinato tridimensionale sono dati i punti $A(3, t, -5)$, $B(2t, 4, -1)$ e $C(6, 8, 7)$. Indichiamo i raggi vettori dei rispettivi punti con $\vec{a} = \vec{r}_A$, $\vec{b} = \vec{r}_B$ e $\vec{c} = \vec{r}_C$.
- a) Per quali valori del numero reale t il modulo del vettore $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ è uguale a 11? *(4 punti)*
- b) Calcolate il numero reale t in modo che il triangolo ABC sia rettangolo con l'angolo retto nel vertice C . *(4 punti)*
- c) Sia $t = 2$. Dimostrate che in questo caso i vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} giacciono nello stesso piano. *(4 punti)*

03. In un cerchio di centro S e raggio 2 cm la corda MN è lunga $2\sqrt{3}$ cm .

- a) Calcolate l'ampiezza dell'angolo al centro $\varphi = \sphericalangle MSN$. (2 punti)
- b) Calcolate l'area del trapezio che ha come basi la corda MN e il diametro del cerchio. Scrivete il risultato esatto. (2 punti)
- c) Quale percentuale dell'area del cerchio occupa l'area della parte minore del settore circolare delimitata dalla corda MN ? (4 punti)
- d) Sia il punto P il terzo vertice del triangolo MNP , inscritto nel cerchio dato, nel quale l'angolo $\sphericalangle MPN$ è un angolo acuto. Le lunghezze dei lati MP e NP stanno nel rapporto di $2 : 1$. Calcolate l'ampiezza dell'angolo $\sphericalangle MPN$ e le lunghezze dei lati MP e NP . (5 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA