



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SECONDA SESSIONE D'ESAME

MATEMATICA

Prova d'esame 1

Livello superiore

Lunedì 29 agosto 2005 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 12 esercizi, vanno risolti tutti nello spazio sotto il testo dell'esercizio. **I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate. Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

Gli esercizi risolti a matita e le risoluzioni non chiare e illeggibili verranno valutati con zero (0) punti. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 80 punti.

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 16 pagine, di cui 2 vuote.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

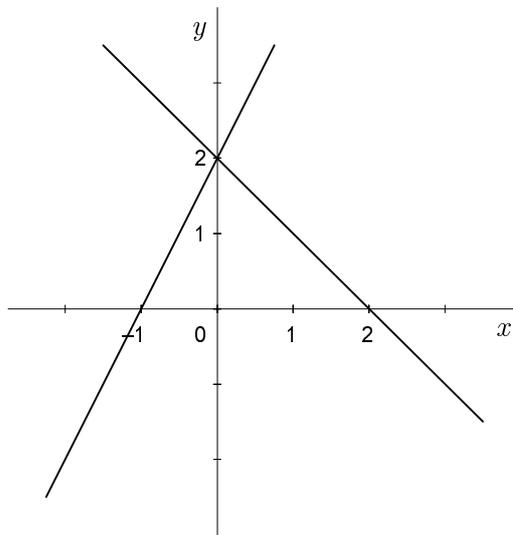
$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

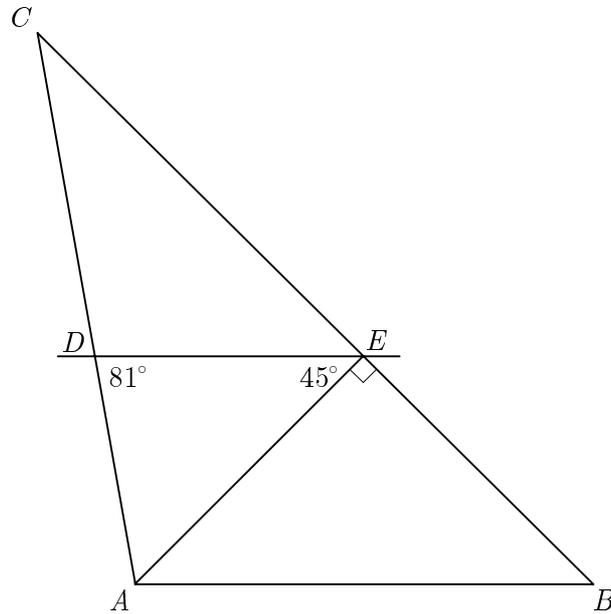
01. Nel sistema coordinato sono disegnate due rette. Scrivete le loro equazioni e calcolate l'area del triangolo delimitata dalle due rette e dall'asse x .

(6 punti)



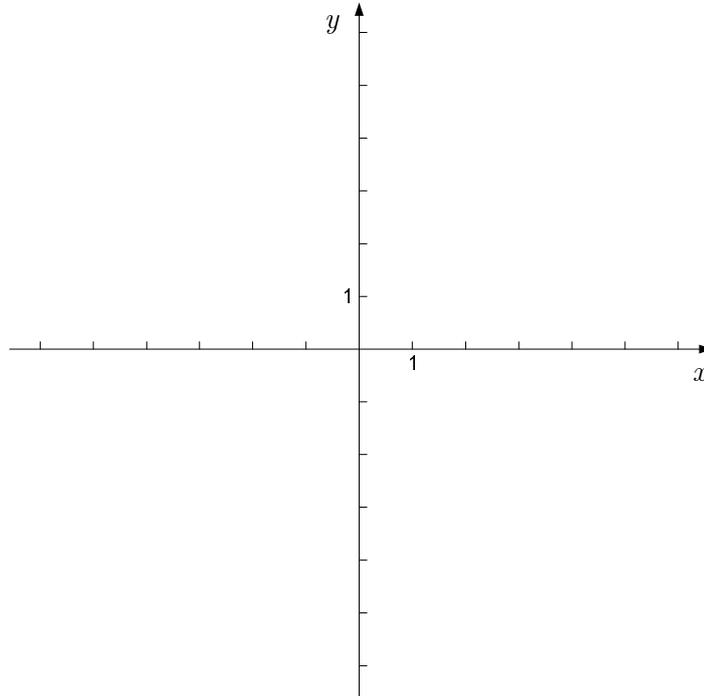
02. Nella figura $DE \parallel AB$, $\sphericalangle DEA = 45^\circ$, $\sphericalangle ADE = 81^\circ$ e la distanza AE è l'altezza sul lato BC del triangolo ABC . Calcolate gli angoli interni α , β e γ del triangolo ABC . Calcolate inoltre la lunghezza del lato AB se $|BE| = 3\sqrt{2}$ cm.

(8 punti)



03. Tracciate il grafico della funzione $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Scrivete l'intervallo dove la funzione decresce.

(8 punti)

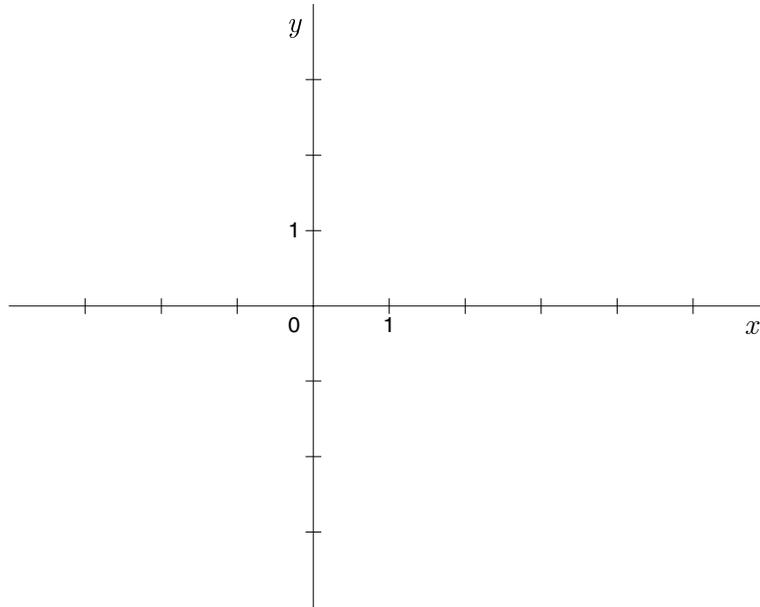


04. Siano x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione $\sqrt{2}x^2 - 4x - 2\sqrt{2} = 0$. Calcolate il valore dell'espressione $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$.

(6 punti)

05. Al quadrato di vertici $A(0, -2)$, $B(4, -2)$, $C(4, 2)$ e $D(0, 2)$ inscriviamo e circoscriviamo due circonferenze. Per ogni circonferenza determinate il centro, il raggio e la sua equazione. Fate lo schizzo nel sistema coordinato dato.

(6 punti)



06. Scrivete i primi tre termini della successione il cui termine generale è $a_n = 100 - 2n$.
Dimostrate che la successione è aritmetica e calcolate la somma dei primi 5000 termini.

(7 punti)

07. Scrivete il numero complesso $(5 - 10i)^2 \cdot (2 + i)^{-1}$ nella forma $a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

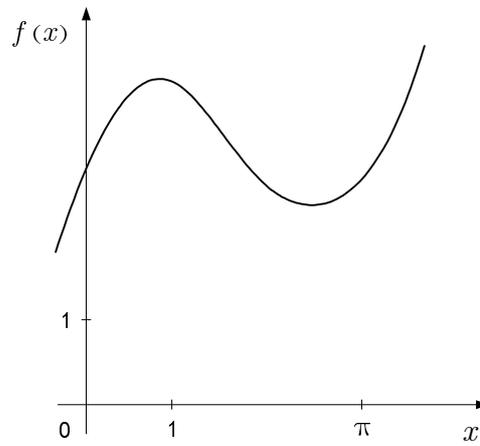
(7 punti)

08. Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ nel punto di ascissa $x = -1$.

(6 punti)

09. Calcolate l'area della figura delimitata dal grafico della funzione $f(x) = 2x + 3 \cos x$ (vedi sotto), dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.

(6 punti)



10. Calcolate l'intersezione tra i grafici delle funzioni $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 65 \cdot 2^x - 1$.

(6 punti)

11. È data la funzione $f(x) = \tan\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$. Scrivete il suo dominio, calcolate gli zeri e l'intersezione del grafico con l'asse delle ordinate.

(8 punti)

12. L'angolo tra i vettori \vec{a} e \vec{b} misura 60° . Il prodotto scalare dei vettori \vec{a} e \vec{b} è uguale a 15, il prodotto scalare dei vettori \vec{a} e $\vec{a} + \vec{b}$ invece 51. Calcolate il modulo del vettore \vec{a} e il modulo del vettore \vec{b} .

(6 punti)

PAGINA VUOTA

PAGINA VUOTA