



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SECONDA SESSIONE D'ESAME

MATEMATICA

≡ Prova d'esame 2 ≡

Livello superiore

Lunedì 29 agosto 2005 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 3 esercizi strutturati. Risolvete tutti gli esercizi. Gli esercizi vanno risolti nello spazio sotto il testo dell'esercizio e nella pagina che segue. Le pagine 10, 11, e 12 sono di riserva, usatele solo in caso di carenza di spazio. Non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto nelle suddette pagine.

I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

Gli esercizi risolti a matita e le risoluzioni non chiare e illeggibili verranno valutati con zero (0) punti. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 40 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 12 pagine, di queste 3 sono di riserva.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

VOLTATE PAGINA

01. È data la funzione $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x-2}$.

a) Calcolate gli estremi relativi della funzione f .

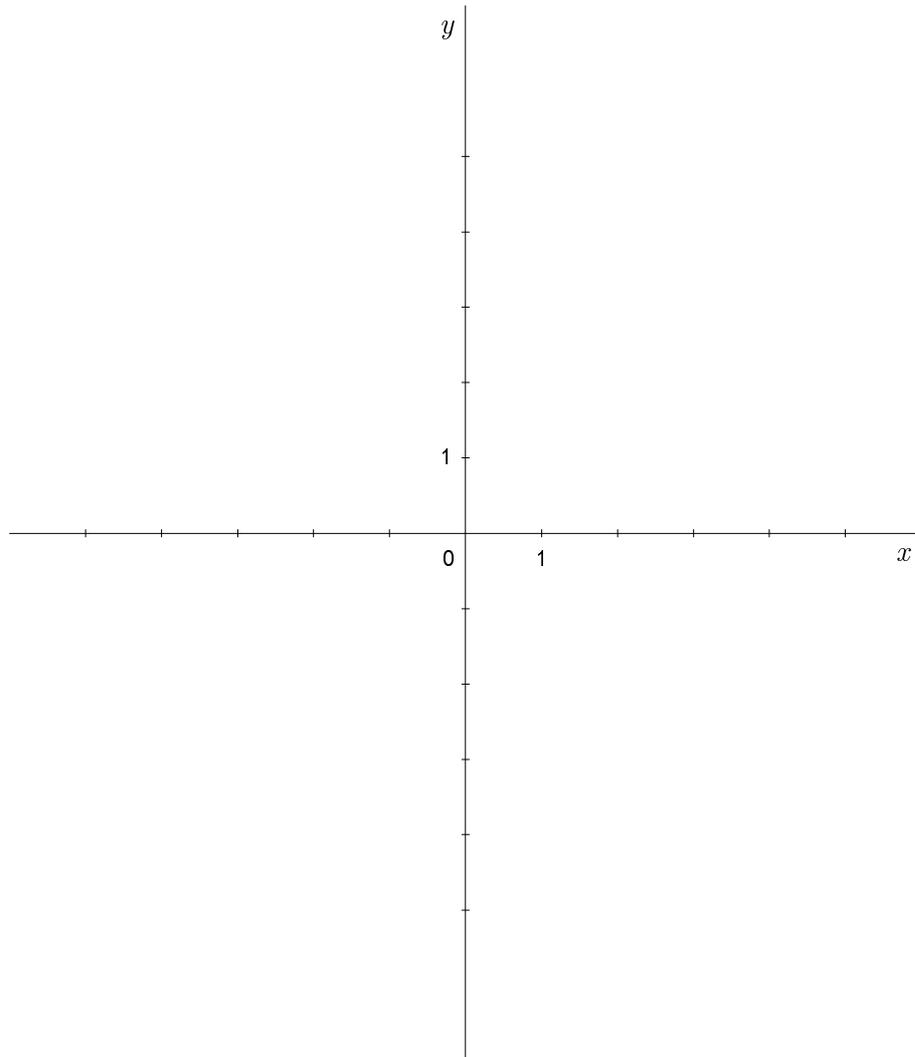
(5 punti)

b) Calcolate gli zeri, i poli, gli asintoti e tracciate il grafico della funzione f .

(6 punti)

c) Dimostrate che la funzione $g(x) = f(x+1) - 2$ è dispari.

(4 punti)



02. La circonferenza \mathcal{K} di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ interseca l'asse x in due punti. Indichiamo con A il punto d'intersezione a sinistra, e con B quello a destra.
- a) Calcolate le coordinate dei punti A e B . (2 punti)
- b) Calcolate l'area della parte del settore circolare delimitata dalla corda AB e dal rispettivo arco. Il risultato sia espresso a due cifre significative. (5 punti)
- c) Scrivete l'equazione della retta tangente alla circonferenza \mathcal{K} nel punto d'intersezione destro B sull'asse x . (3 punti)
- d) Per quali numeri reali m l'equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 2m^2 - 9m + 10 = 0$ rappresenta una circonferenza? (3 punti)

03. In un'urna ci sono 10 palline: 5 rosse, 3 azzurre e 2 bianche.

a) Dall'urna estraiamo a caso contemporaneamente 4 palline.

Calcolate la probabilità degli eventi:

A – tutte le palline estratte sono rosse,

B – due palline estratte sono rosse e due sono azzurre,

C – almeno una pallina estratta è bianca.

(5 punti)

b) Dall'urna estraiamo a caso contemporaneamente 2 palline.

Calcolate la probabilità dell'evento, le due palline estratte sono azzurre se sappiamo che almeno una delle due è azzurra.

(5 punti)

c) Dall'urna estraiamo tutte le palline e le mettiamo a caso in fila.

Calcolate la probabilità dell'evento, che le tre palline azzurre stiano assieme, una dietro all'altra, nella fila.

(2 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA