



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 0 6 1 4 0 2 1 2 1

PRIMA SESSIONE D'ESAME

MATEMATICA

≡ Prova d'esame 2 ≡

Livello superiore

Giovedì, 1 giugno 2006 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 3 esercizi strutturati. Risolvete tutti gli esercizi. Gli esercizi vanno risolti nello spazio sotto il testo dell'esercizio e nella pagina che segue. Le pagine 10, 11, e 12 sono di riserva, usatele solo in caso di carenza di spazio. Non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto nelle suddette pagine.

I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato, tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna di esse potrà esservi utile.

Le soluzioni degli esercizi della prova d'esame non vanno scritti a matita. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 40 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 12 pagine, di queste 3 sono di riserva.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritte ed inscritte ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

VOLTATE PAGINA

01. Nel sistema coordinato nel piano sono dati i punti $A(-2,4)$, $B(4,4)$ e $C(5,3)$.

a) Calcolate l'angolo tra le distanze OB e AC . (Il punto O è l'origine del sistema coordinato.)
Arrotondate il risultato ai primi di grado.

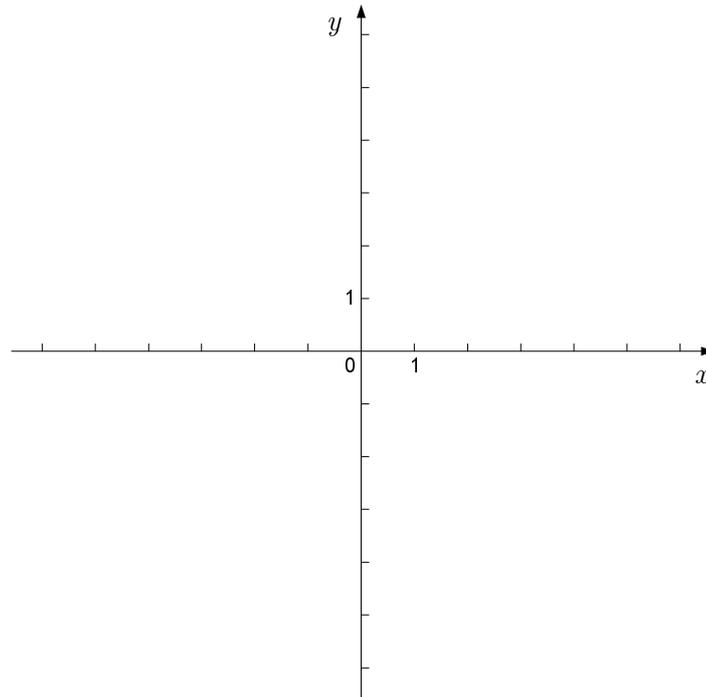
(3 punti)

b) Scrivete l'equazione della circonferenza che passa attraverso i punti A , B e C . Quanto misura il raggio della circonferenza?

(5 punti)

c) Scrivete l'equazione dell'ellisse di fuochi A e B e che passa per il punto C . Tracciate l'ellisse nel sistema coordinato.

(6 punti)



02. Risolvete i seguenti esercizi con i numeri complessi.

a) Nel piano complesso sono dati gli insiemi $\mathcal{A} = \{z; |z| \leq 2\}$, $\mathcal{B} = \{z; \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}$ e $\mathcal{C} = \{z; |\operatorname{Re} z| < 3\}$. Disegnate l'insieme $(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \setminus \mathcal{A}$.

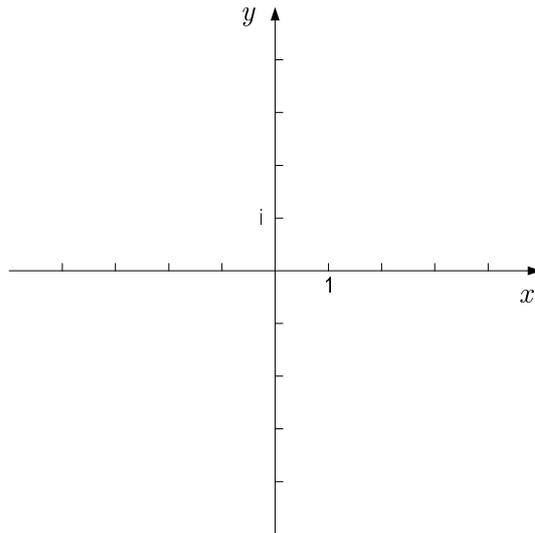
(4 punti)

b) Calcolate i numeri reali a e b in modo che $(-3 + ai) \cdot (b + 3i) = -30 + 15i$.

(4 punti)

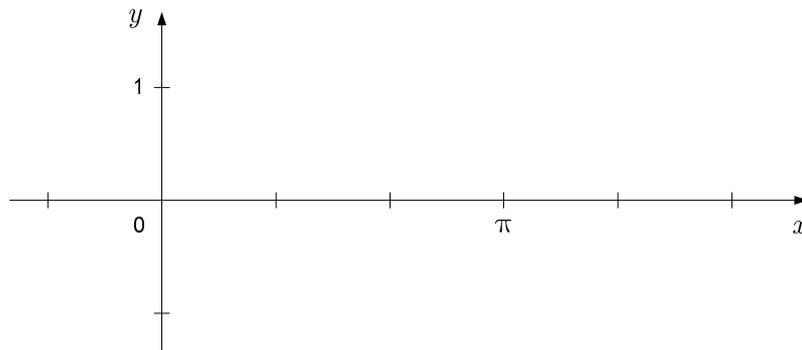
c) Dimostrate che il numero complesso $z = \sqrt{\log_2 a - 3} + i \log(a^2 - 13a + 44)$ non è reale se $a \in \mathbb{R}$. Per quale numero reale a vale che $\operatorname{Re} z = 0$?

(5 punti)



03. Sono date le funzioni $f(x) = \sin 2x$ e $g(x) = \sin x$.

- a) Tracciate i grafici delle funzioni nell'intervallo $[0, \pi]$. Calcolate l'intersezione dei grafici in $(0, \pi)$.
(4 punti)
- b) Calcolate l'angolo con il quale le funzioni f e g si intersecano nell'intervallo $(0, \pi)$.
(4 punti)
- c) Calcolate l'area della figura delimitata dai grafici delle funzioni f e g nell'intervallo $(0, \pi)$.
(3 punti)
- d) Per quali valori del numero reale a diversi da 0 le curve $y = a \sin 2x$ e $y = \sin x$ si intersecano nell'intervallo $(0, \pi)$?
(2 punti)



PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA