



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 0 6 2 4 0 2 1 1 1

SECONDA SESSIONE D'ESAME

# MATEMATICA

## Prova d'esame 1

### Livello superiore

**Lunedì, 28 agosto 2006 / 90 minuti**

*Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, del compasso e di due squadretti e un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo con allegate due schede di valutazione e due fogli per la minuta.*

**MATURITÀ GENERALE**

#### INDICAZIONI PER I CANDIDATI

**Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!**

**Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 12 esercizi, vanno risolti tutti nello spazio sotto il testo dell'esercizio. **I valutatori non terranno conto dei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna vi potrà essere utile.

**Le soluzioni degli esercizi della prova d'esame non vanno scritti a matita. Se avete risolto l'esercizio con più versioni, indicate in modo inequivocabile la risoluzione da correggere.**

Leggete attentamente ogni esercizio, risolvete con ponderazione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio totale massimo conseguibile è di 80 punti.

Buon lavoro.

*Questa prova d'esame ha 16 pagine, di cui 2 vuote.*

## **Formule**

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,  $r = \frac{A}{p}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:  

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:  
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ ,  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:  
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$   

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:  
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
,  $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:  
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$ ;  
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$ ;  
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :  

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a > b$
- Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a$  è il semiasse reale.
- Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:  

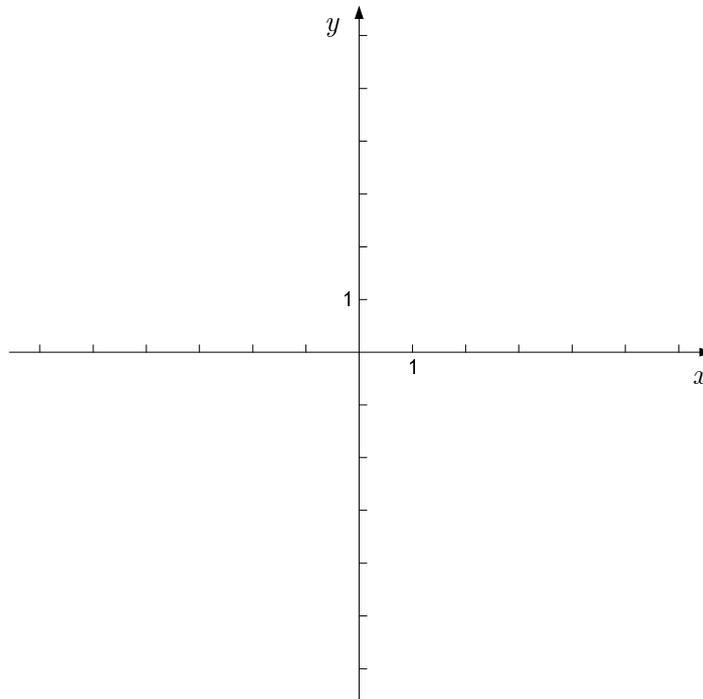
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
,  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

01. Calcolate i punti d'intersezione tra la parabola  $y = -x^2 + 2x + 3$  e la retta  $y = x + 1$ .

*(6 punti)*

02. Sul piano cartesiano che trovate qui sotto tracciate le rette corrispondenti alle equazioni  $3 + x = 0$ ,  $2 + y = 0$  e  $x - y = 3$  e calcolate l'area del triangolo che esse racchiudono.

(7 punti)



03. È data la funzione  $f(x) = \sqrt{3x+4}$ . Calcolate  $f(4)$  e  $f\left(\frac{3}{4}\right)$ . Scrivete il campo d'esistenza della funzione  $f$ .

*(5 punti)*

04. Risolvete l'equazione  $\log_3(x + 71) + \log_3(x - 9) - \log_3(x - 1) = 2$ .

*(7 punti)*

05. Aleš, Boris, Maja, Nina e Tina si mettono a caso in fila per comperare i biglietti d'ingresso. Qual è la probabilità dell'evento  $A$ , che le ragazze si trovino all'inizio della fila?

*(6 punti)*

06. L'altezza del rombo  $ABCD$  misura 9. L'angolo alla base  $\sphericalangle DAB = \alpha = 30^\circ$ . Calcolate con esattezza la lunghezza del lato e con esattezza la lunghezza della diagonale maggiore del rombo. Fate lo schizzo della figura.

*(8 punti)*

07. Sono dati i vettori  $\vec{a} = (-3, 1)$  e  $\vec{b} = (2, 4)$ . Scrivete il vettore  $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ , calcolate il prodotto scalare  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  e l'angolo  $\alpha$  tra i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Approssimate l'ampiezza dell'angolo al centesimo di grado.

*(8 punti)*

08. Se diminuiamo di 3 il numeratore di una frazione e moltiplichiamo il suo denominatore per 2, otteniamo il numero  $\frac{2}{7}$ . Se moltiplichiamo il numeratore della stessa frazione per 2 e diminuiamo il suo denominatore di 3, otteniamo il numero 2. Qual è la frazione?

*(7 punti)*

09. Risolvete nell'insieme dei numeri complessi l'equazione  $(1 + i)z + 2i = 1$ . Scrivete la parte reale e la parte immaginaria della risoluzione.

*(7 punti)*

10. Determinate il numero  $a$  in modo che il resto della divisione del polinomio  $p(x) = x^3 - 2x + a$  con il polinomio  $q(x) = x - 3$  sia uguale a 4. Scrivete il quoziente  $k(x)$  ottenuto dalla divisione.

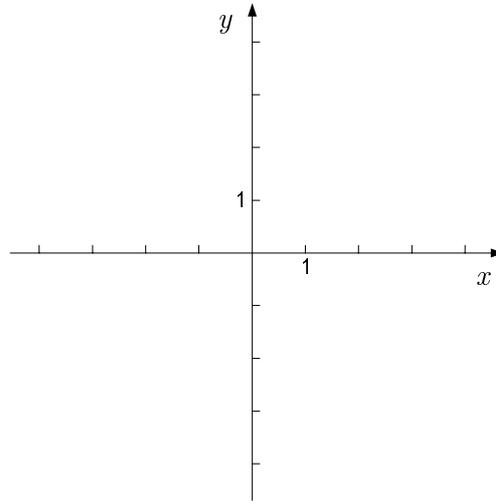
*(6 punti)*

11. È data la funzione  $f(x) = \sin 3x + 4 \cos x$ . Calcolate la sua derivata e dimostrate che vale l'uguaglianza  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 + 2\sqrt{3}$ .

*(6 punti)*

12. Tracciate il grafico della funzione  $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x \leq 1. \\ x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$ . Calcolate  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ .

(7 punti)



PAGINA VUOTA

PAGINA VUOTA