



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SECONDA SESSIONE D'ESAME

Livello superiore
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 2 ≡

Martedì, 28 agosto 2007 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, nonché del compasso, di due squadretti e di un righello. Al candidato vanno consegnati il fascicolo della prova, due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 3 esercizi strutturati. Risolvete tutti gli esercizi. Gli esercizi vanno risolti nello spazio sotto il testo di ciascuno di essi e nella pagina che lo segue. Le pagine 10, 11, e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. **I valutatori non terranno in considerazione le risoluzioni contenute nei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato, tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna di esse potrà esservi utile.

Le soluzioni degli esercizi della prova d'esame non vanno scritte a matita. Se avete risolto l'esercizio proponendo più versioni, indicate in modo inequivocabile quella che il valutatore deve correggere.

Leggete bene ogni esercizio e risolvete la prova con attenzione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio massimo conseguibile è di 40 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 12 pagine, di queste 3 sono di riserva.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

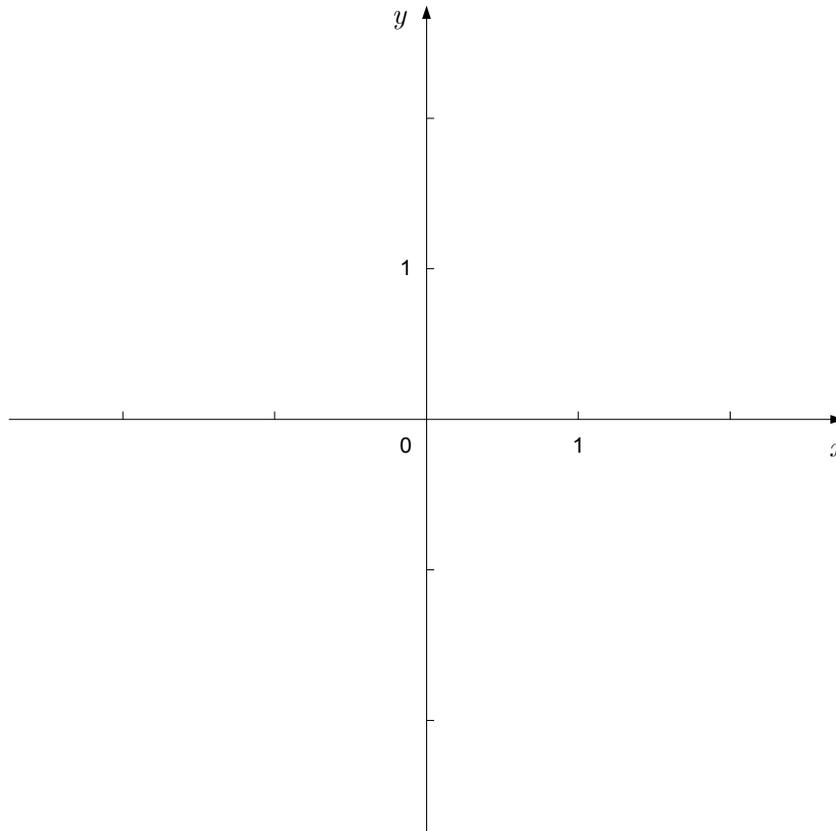
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

VOLTATE PAGINA

01. Sono date le funzioni $f(x) = \frac{a}{16}x - \frac{a}{32}x^2$ e $g(x) = \frac{x^4}{a} - \frac{4x^2}{a}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

- a) Sia $a = 4$. Calcolate gli estremi e gli zeri delle funzioni f e g e tracciate i loro grafici nello stesso sistema di coordinate.

(7 punti)



- b) Dimostrate che i grafici delle funzioni f e g si intersecano nel punto $P(2, 0)$ ad angolo retto per ogni $a \in \mathbb{R}^+$.

(3 punti)

- c) Dimostrate che l'area della figura delimitata dai grafici delle funzioni nell'intervallo $(0, 2)$ è uguale a $\frac{a}{24} + \frac{64}{15a}$.

(3 punti)

- d) Per quale valore di a l'area della figura racchiusa dai due grafici delle funzioni f e g è minima?

(3 punti)

02. Sia $a_1, 1, a_3, \frac{1}{4} \dots$ una successione geometrica di soli termini positivi.

a) Calcolate i membri a_1 e a_3 e scrivete il termine generale della successione.

(3 punti)

b) Calcolate tra quali membri successivi della successione si trova il numero 10^{-9} . Scrivete la risposta.

(4 punti)

c) Dimostrate che la somma $\sum_{k=1}^{50} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 \dots + a_{100}$ è uguale a $\frac{4}{3}(1 - 2^{-100})$.

(3 punti)

d) Calcolate la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots$.

(3 punti)

03. Una squadra di pallacanestro è composta da 12 giocatori: 5 difensori, 4 ali e 3 centri. Il nome di uno dei difensori è Sašo e uno dei centri si chiama Primož. Gli altri giocatori hanno nomi differenti.

a) In quanti modi tutti i giocatori si possono mettere in fila se Sašo deve stare al primo posto nella fila e se i centri devono stare insieme nella fila? (non ci sono altre limitazioni)

(3 punti)

b) In quanti modi l'allenatore può comporre la prima squadra di 5 giocatori se in essa devono esserci 2 difensori, 2 ali e 1 centro?

(2 punti)

c) Durante l'allenamento l'allenatore distribuirà i giocatori a caso in tre gruppi di 4 giocatori ciascuno: il primo gruppo si allenerà ai tiri liberi, il secondo in difesa e il terzo gruppo in attacco.

Calcolate la probabilità dei seguenti eventi:

A – Sašo e Primož si alleneranno giocando in difesa,

B – Sašo si allenerà ai tiri liberi, Primož invece giocando in attacco.

(6 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA