



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE PRIMAVERILE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

**Sabato, 4 giugno 2011 / 90 minuti**

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, di una calcolatrice tascabile priva di interfaccia grafica e possibilità di calcolo con simboli, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.  
Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 2.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verrà assegnato il punteggio di zero (0). Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 16 pagine, di cui 2 bianche.*

## Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,  $r = \frac{A}{p}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:  

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:  
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ ,  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:  
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$   

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:  
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   
 $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$ ,  $\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:  
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$   
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$   
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :  

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a > b$
- Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a$  è il semiasse reale.
- Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:  

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$
,  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

01. È data la funzione  $f(x) = -3x + 5$ . Calcolate  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ . Calcolate per quale valore di  $x$  il valore della funzione è  $\frac{11}{2}$ . Per quali valori di  $x$  i valori della funzione sono negativi?

*(8 punti)*

02. Il primo termine di una successione aritmetica è  $-4$ , il quinto invece  $8$ . Calcolate la ragione e il centesimo termine di tale successione.

*(5 punti)*

03. Semplificate l'espressione  $((-a)^4)^3 \cdot (-a)^{-3} : a^9$ .

*(5 punti)*

04. In un triangolo acutangolo nel quale il lato  $b$  è più lungo del lato  $a$ , il lato  $a = \sqrt{17}$  cm, l'altezza  $h_c = 4$  cm e la mediana  $m_c = 5$  cm. Calcolate il lato  $c$  e l'area del triangolo. Fate lo schizzo della figura.

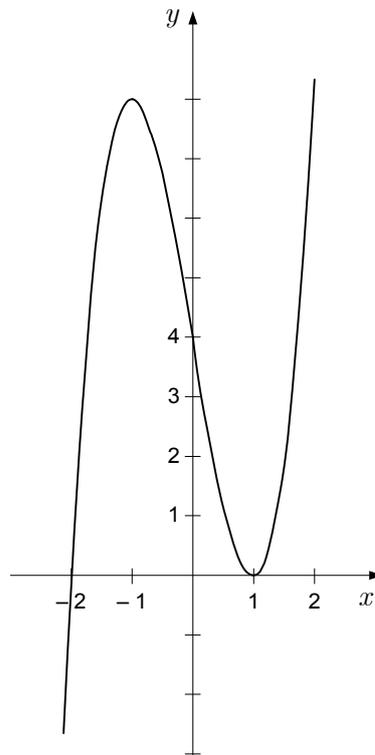
*(8 punti)*

05. Scrivete il numero complesso  $(5 - 10i)^2 (2 + i)^{-1}$  nella forma  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*(6 punti)*

06. Scrivete il polinomio di terzo grado il cui grafico è riportato nel sistema coordinato sottostante.

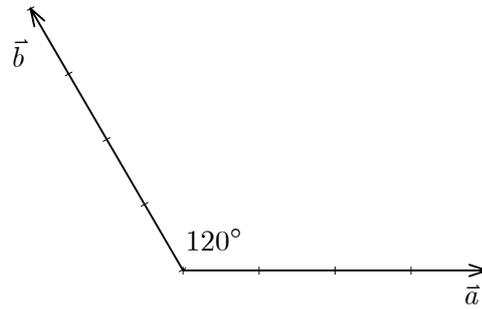
(6 punti)



07. Un'ellisse centrata all'origine del sistema coordinato ha due vertici  $T_1(2, 0)$  e  $T_2(-2, 0)$  e passa per il punto  $A\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Scrivete la sua equazione e gli altri due vertici.

*(7 punti)*

08. I vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  della figura sottostante hanno il modulo di 4 unità, l'angolo tra di essi è di  $120^\circ$ .



Fate lo schizzo del vettore  $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$  e calcolate i prodotti scalari  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  e  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ .

(8 punti)

09. Sia  $f(x) = a \cdot 3^{x-1} + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Determinate i numeri  $a$  e  $b$  in modo che  $f(1) = -1$  e  $f(3) = -17$ . Scrivete il campo di esistenza  $\mathcal{D}_f$  e l'insieme immagine  $\mathcal{Z}_f$  della funzione ottenuta.

(7 punti)

10. Calcolate gli zeri delle funzioni  $f(x) = \sin \frac{x}{3}$  e  $g(x) = 2 \sin \frac{x}{3} + 1$ .

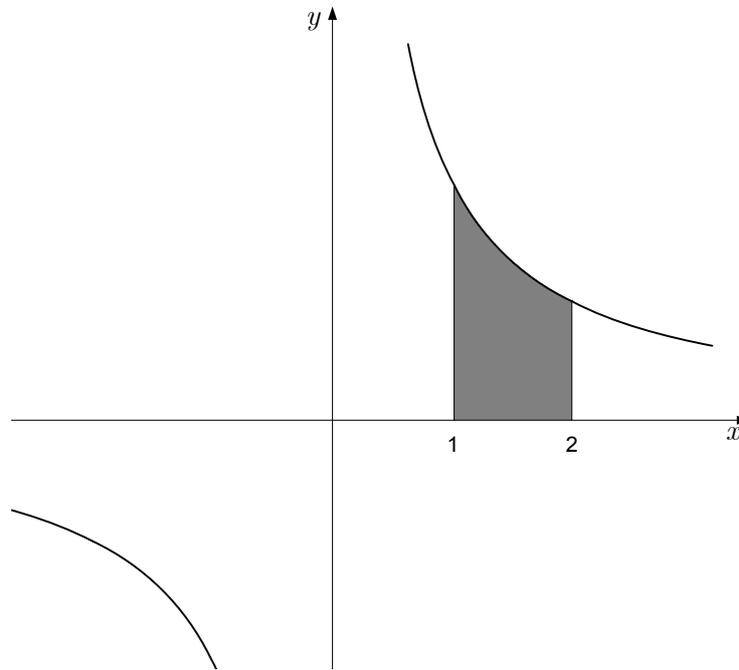
*(7 punti)*

11. Margherita ha 21 amiche e 11 amici; due degli amici si chiamano rispettivamente Andrea e Borut. A una festa inviterà 3 amiche e 4 amici. In quanti modi lo può fare? Qual è la probabilità che tra gli invitati ci siano Andrea e Borut, se Margherita sceglierà gli invitati a caso?

*(6 punti)*

12. Nel sottostante sistema coordinato è riportato il grafico della funzione  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Calcolate a due cifre decimali il numero  $a$ , se l'area della figura ombreggiata è uguale a 4.

(7 punti)



**Pagina bianca**

**Pagina bianca**