



Šifra kandidata:

Državni izpitni center



PREDMATURITETNI PREIZKUS

## Višja raven

# MATEMATIKA

==== Izpitna pola 2 ====

- B) Krajše strukturirane naloge
- C) Strukturirane naloge

**Ponedeljek, 8. marec 2021 / 90 minut (45 + 45)**

Dovoljeno gradivo in pripomočki:

Kandidat prinese nalinvo pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko,  
geometrijsko orodje (šestilo in ravnilo, lahko tudi trikotnik)  
in računalo.

Priloga s formulami in konceptna lista so na perforiranih listih, ki jih kandidat pazljivo iztrga.

## SPLOŠNA MATURA

### NAVODILA KANDIDATU

**Pazljivo preberite ta navodila.**

**Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.**

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani).

Izpitna pola je sestavljena iz dveh delov, dela B in dela C. Časa za reševanje je 90 minut. Priporočamo vam, da za reševanje dela B porabite 45 minut, za reševanje dela C pa 45 minut.

Izpitna pola vsebuje 6 krajših strukturiranih nalog v delu B in 2 strukturirani nalogi v delu C. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 60, od tega 40 v delu B in 20 v delu C. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na straneh 3 in 4.

Rešitve pišite z nalinivim peresom ali s kemičnim svinčnikom v izpitno polo v za to predvideni prostor **znotraj okvirja**. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 15 in 20 sta rezervni; uporabite ju le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 20 strani, od tega 2 rezervni.





## Formule

**(Vsota in razlika potenc z naravnim eksponentom)** Za poljubna  $a, b \in \mathbb{R}$  in za poljubno naravno število  $n$  velja

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

**(Evklidov in višinski izrek)** Pravokotni trikotnik ima kateti  $a$  in  $b$  ter hipotenuzo  $c$ . Višina na hipotenuzo je  $v_c$ , pravokotna projekcija katete  $a$  na hipotenuzo je  $a_1$ , pravokotna projekcija katete  $b$  na hipotenuzo pa  $b_1$ . Tedaj velja  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $v_c^2 = a_1b_1$ .

**(Polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga)** Trikotnik ima stranice  $a, b$  in  $c$ , polovica obsega

je  $s = \frac{a+b+c}{2}$ , ploščina je  $S$ , polmer danemu trikotniku včrtanega kroga je  $r$  in polmer danemu trikotniku očrtanega kroga je  $R$ . Tedaj je  $r = \frac{S}{s}$  in  $R = \frac{abc}{4S}$ .

**(Heronova formula)** Trikotnik ima stranice  $a, b$  in  $c$ , polovica obsega je  $s = \frac{a+b+c}{2}$ . Tedaj je njegova ploščina  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

**(Ploščina trikotnika)** Naj bodo  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  in  $C(x_3, y_3)$  točke v ravnini. Ploščina trikotnika z oglišči  $A, B$  in  $C$  je enaka  $S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$ .

**(Krogla)** Površina in prostornina krogle s polmerom  $r$  sta  $P = 4\pi r^2$ ,  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ .

**(Razdalja točke od premice)** Naj bodo  $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  in naj  $a$  in  $b$  ne bosta oba enaka 0.

Razdalja točke  $T_0(x_0, y_0)$  od premice  $p$ , podane z enačbo  $ax + by - c = 0$ , je

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**(Logaritem)** Naj bosta  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ . Tedaj za vsak  $x > 0$  velja  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

**(Adicijski izreki)** Za poljubna  $x, y \in \mathbb{R}$  velja

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Za poljubna  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ , za katera je  $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$  za poljuben  $k \in \mathbb{Z}$  in

$$\tan x \tan y \neq -1, \text{ velja } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

**(Kotne funkcije polovičnih kotov)** Za poljuben  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Za poljuben  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z}\}$  velja  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ .

**(Faktorizacija vsote in razlike kotnih funkcij)** Za poljubna  $x, y \in \mathbb{R}$  velja

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$



(Razčlenitev produkta kotnih funkcij) Za poljubna  $x, y \in \mathbb{R}$  velja

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

**(Elipsa)** Elipsa v ravnini ima polosi  $a$  in  $b$  ( $a > b$ ), njena linearna ekscentričnost je  $e$ , njena

numerična ekscentričnost je  $\varepsilon$ . Tedaj velja  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Hiperbola)** Hiperbola v ravnini ima realno polos  $a$  in imaginarno polos  $b$ , njena linearna

ekscentričnost je  $e$ , njena numerična ekscentričnost je  $\varepsilon$ . Tedaj velja  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Parabola)** Parabola v ravni z enačbo  $y^2 = 2px$  ima gorišče v  $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , enačba premice vodnice

dane parabole pa je  $x = -\frac{p}{2}$ .

**(Aritmetično zaporedje)** Vsota prvih  $n$  členov aritmetičnega zaporedja  $(a_n)$  je  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ .

(Geometrijsko zaporedje) Vsota prvih  $n$  členov geometrijskega zaporedja  $(a_n)$  s kvocientom  $q \in \mathbb{R}$

je  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ , če je  $q \neq 1$ , in  $S_n = na_1$ , če je  $q = 1$ .

$$(\text{Limiti}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{in} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**(Nedoločeni integral)** Naj bo  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tedaj je za vsak  $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{in} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

**(Integralacija po delih)** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}$  in  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljivi funkciji. Tedaj velja

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

**(Volumen rotacijskega telesa)** Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Volumen telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki ga omejujejo graf funkcije  $f$ , abscisna os ter premici  $x = a$  in  $x = b$ , zavrtimo okrog abscisne osi za  $360^\circ$ , je 
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

**(Bernoullijeva formula)** Naj bo  $p$  verjetnost, da se v danem poskusu zgodi dogodek  $A$ . Verjetnost, da se dogodek  $A$  v  $n$  zaporednih ponovitvah poskusa zgodi natanko  $k$ -krat, je

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$



## Konceptni list



## Konceptni list

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



7/20

## Konceptni list



## Konceptni list



M 2 1 0 4 0 2 1 2 0 9

## B) KRAJŠE STRUKTURIRANE NALOGE

1. Za poljubni naravni števili  $m$  in  $n$  označimo z  $D(m, n)$  največji skupni delitelj teh dveh števil in z  $v(m, n)$  njun najmanjši skupini večkratnik.

Razcepite števila 45, 48 in 60 na prafaktorje.

Izračunajte  $\left( \frac{D(45, 48)}{D(48, 60)} - \frac{D(11, 23)}{v(4, 10)} \right) \cdot v(5, 20)$ .

(8 točk)



2. Poraba avtomobila je 6 litrov goriva na 100 kilometrov, kombi pa z litrom goriva prevozi 12 kilometrov. Koliko več goriva od avtomobila je porabil kombi, če sta obe vozili prevozili po 350 kilometrov? Rezultat zaokrožite na tisočine litra.

(5 točk)



3. V aritmetičnem zaporedju je drugi člen enak 39, peti pa 30.  
Izračunajte diferenco, prvi člen in 37. člen danega zaporedja.  
Izračunajte vsoto prvih 50 členov danega zaporedja.

(6 točk)



4. V razredu z 28 učenci je 12 deklet in 16 fantov. Trem fantom je ime Anže.

Učitelj bo za spraševanje naključno izbral enega od učencev (dekle ali fanta) tega razreda. Izračunajte verjetnost dogodka  $A$ , da bo naključno vprašanemu ime Anže.

Učitelj bo za spraševanje naključno izbral dva od fantov tega razreda. Izračunajte verjetnost dogodka  $B$ , da bo natanko enemu imenem Anže.

Učitelj bo za spraševanje naključno izbral tri učence tega razreda. Izračunajte verjetnost dogodka  $C$ , da bosta v naključno izbrani trojki zastopana oba spola.

(8 točk)



M 2 1 0 4 0 2 1 2 1 3

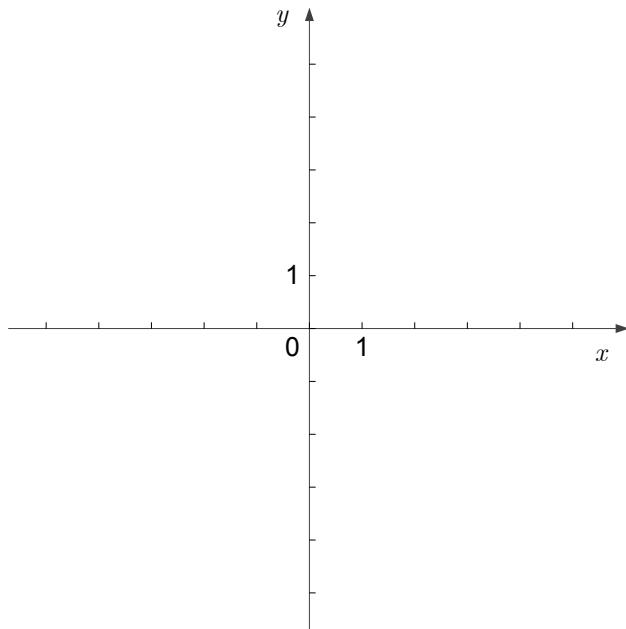
5. V trikotniku  $ABC$  je dolžina stranice  $AB$  enaka  $c = |AB| = 2$  cm, dolžina stranice  $AC$  je enaka  $b = |AC| = \sqrt{2}$  cm in velikost kota  $\angle ABC$  je enaka  $\beta = 30^\circ$ . Izračunajte dolžino stranice  $BC$ . Zapišite obe rešitvi. Rezultat zaokrožite na stotinko centimetra.

(5 točk)



6. Dana je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom  $f(x) = 4^x - 2$ .

Izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije  $f$ , zapišite enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije  $f$  in graf narišite.



Izračunajte, pod kolikšnim kotom graf funkcije  $f$  seka abscisno os. Kot zaokrožite na minuto.

(8 točk)



# Rezervna stran

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.

OBRNITE LIST.



### **C) STRUKTURIRANE NALOGE**

1. Rešite naslednje naloge.
    - 1.1. Z Evklidovim algoritmom poiščite največji skupni delitelj števil  $a = 27839$  in  $b = 58685$ .  
(2 točki)
    - 1.2. Naj bo  $n$  poljubno naravno število. Koliko deliteljev ima število  $c = 24^{n+2} \cdot 6^{n-1}$  v množici naravnih števil?  
(3 točke)
    - 1.3. Izračunajte  $S = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$ . Rezultat dokažite z matematično indukcijo.  
(5 točk)

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



M 2 1 0 4 0 2 1 2 1

17/20



2. Dana je množica premic  $M = \{p; p \text{ ima enačbo } y = kx + n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, |k| \leq 3, |n| \leq 3\}$ .

- 2.1. Iz množice  $M$  naključno izberemo eno premico. Izračunajte verjetnosti dogodkov:

$A$  – izbrana premica seka abscisno os v natanko eni točki  $T(-1, 0)$ ;

$B$  – naklonski kot izbrane premice je  $\arctan 2;$

$C$  – izbrana premica in koordinatni osi omejujejo trikotnik s ploščino  $S = 2$ .

(6 točk)

- 2.2. Iz množice  $M$  naključno izberemo eno premico. Ta poskus ponovimo dvanajstkrat.

Izračunajte verjetnost dogodka

*E* – natanko osemkrat smo izbrali premico, ki je vzporedna simetrali sodih kvadrantov.

(4 točke)

V sivo polje ne pišite. V sivo polje ne pišite.



M 2 1 0 4 0 2 1 2 1 9

19/20



# Rezervna stran